

Lehrplan Leistungsfach Mathematik

Der Unterricht im Leistungsfach findet auf erhöhtem Anforderungsniveau statt und intendiert somit mehr als die Sicherung einer breiten Grundbildung. Durch ein verstärktes wissenschaftspropädeutisches Vorgehen werden sowohl ein erweitertes und vertieftes Verständnis mathematischer Begriffe und Zusammenhänge als auch deren Verwendung für Argumentationen gefördert. Auf diese Weise wird im Leistungsfach einerseits ein erhöhter Komplexitätsgrad erreicht und andererseits auch ein größerer Umfang an mathematischen Themen und Inhalten behandelt.

Hinweise: Im Kopf der Tabelle stehen die jeweils zu erreichenden Kompetenzen. Kursiv geschriebene Fachbegriffe sind im Unterricht verbindlich mit dem Ziel einzusetzen, dass die Schülerinnen und Schüler diese mit eigenen Worten korrekt beschreiben und in unterschiedlichen Kontexten ohne zusätzliche Erläuterung verstehen und anwenden können. Unter dem Tabellenkopf findet sich das konkrete Vorgehen im Unterricht.

Weiterführung der Differentialrechnung <30>	
Die Schülerinnen und Schüler können <ul style="list-style-type: none"> • <i>Funktionen verketteten</i> und <i>Verkettungen</i> von <i>Funktionen</i> erkennen • die <i>Produktregel-</i> und <i>Kettenregel</i> zum Ableiten von Funktionstermen verwenden • <i>gebrochenrationale Funktionen</i> durch Verbinden der Ableitungsregeln in einfachen Fällen ableiten • Extremwertprobleme mit Nebenbedingungen lösen 	
Konkretisierung, Vorgehen im Unterricht	Hinweise
<p>Wiederholung</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Differenzenquotient, Änderungsrate (auch graphische Bestimmung), Tangente und Normale, Steigungswinkel ➤ Tangente und Normale von einem äußeren Punkt ➤ Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten und deren Ableitung ➤ Ganzrationale Funktionen und deren Ableitung ➤ Monotonie, Extrempunkte <p>Weiterführung der Differenzialrechnung</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Ableitungsregeln und höhere Ableitungen ➤ Verkettung von Funktionen und deren Ableitung ➤ Produktregel ➤ Monotonie und Krümmung ➤ Extrem- und Wendepunkte ➤ Extremwertbestimmungen mit und ohne Nebenbedingungen 	<p>Nullstellen, Symmetrie zum Ursprung und zur y-Achse, Verhalten für $x \rightarrow \infty$</p> <p>Auch Produktregel in Verbindung mit Kettenregel</p>

Funktionen und ihre Graphen <35>	
<p>Die Schülerinnen und Schüler lernen neben der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion weitere Funktionen kennen, die sich aus Verknüpfungen oder Verkettungen ergeben. Sie untersuchen Funktionen und ihre Graphen auf charakteristische Eigenschaften.</p> <p>Im Bereich der Extremwertprobleme, der Bestimmung von Funktionstermen und der Untersuchung von Funktionenscharen findet die Differentialrechnung weitere Anwendung.</p> <p>Die Schülerinnen und Schüler lernen ein iteratives Verfahren zur Nullstellenbestimmung kennen.</p>	
<p>Die Schülerinnen und Schüler können</p> <ul style="list-style-type: none"> • die besondere Bedeutung der <i>Basis e</i> bei <i>Exponentialfunktionen</i> erläutern • die <i>eulersche Zahl e</i> näherungsweise bestimmen • charakteristische Eigenschaften der <i>natürlichen Exponentialfunktion</i> beschreiben • die Graphen der <i>natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion</i> unter Verwendung charakteristischer Eigenschaften skizzieren und die Beziehungen zwischen den Graphen beschreiben • Die <i>Ableitungsfunktion</i> der <i>Funktion f</i> mit $f(x) = e^x$ angeben • Die <i>Ableitungsfunktion</i> der <i>Funktion f</i> mit $f(x) = \ln(x)$ angeben • die Graphen von <i>Funktionen</i> in einfachen Fällen auf waagrechte und senkrechte <i>Asymptoten</i> und <i>Nullstellen</i> untersuchen, deren Funktionsterm als Quotient zuvor behandelter Funktionstypen gebildet werden kann • einen Funktionsterm zu gegebenen Eigenschaften eines <i>Graphen</i> ermitteln • Graphen von zusammengesetzten <i>Funktionen</i> (<i>Summe, Produkt, Verkettung</i>) untersuchen • bei <i>Funktionenscharen</i> einzelne Fragestellungen zu Eigenschaften ihrer <i>Graphen</i> oder zu Zusammenhängen zwischen den <i>Graphen</i> untersuchen • ein iteratives Verfahren zur näherungsweise Bestimmung von <i>Nullstellen</i> begründen und durchführen 	
Konkretisierung, Vorgehen im Unterricht	Hinweise
<p>Die natürliche Exponentialfunktion</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion, besondere Bedeutung der Basis e ➤ Bestimmung eines Näherungswertes für e ➤ Graphen von Exponentialfunktionen ➤ Exponentialfunktionen mit Parameter ➤ Umkehrfunktionen ➤ Die Logarithmusfunktion und ihre Ableitung ➤ Exponentialfunktionen im Sachzusammenhang 	<p>Grenzverhalten, waagrechte Asymptoten</p> <p>Auch Exponentialgleichungen Exponentielles Wachstum</p>
<p>Graphen von Funktionen</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Strecken, Verschieben und Spiegeln von Graphen ➤ Linearfaktordarstellung ➤ Trigonometrische Funktionen <p style="text-align: center;">Waagrechte und senkrechte Asymptoten</p> <p>Funktionenscharen</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Gemeinsame Punkte ➤ Ortskurven <p>Näherungsweise Berechnen von Nullstellen</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Newton-Verfahren 	<p>mehrfache Nullstellen</p> <p>Auch Bestimmung der Lösungen von trigonometrischen Gleichungen in einem vorgegebenen Intervall bzw. auf ganz IR</p>

Integralrechnung <35>

Die Schülerinnen und Schüler ziehen Rückschlüsse vom Graphen der Änderungsrate auf den Bestand. Sie lernen mit dem Hauptsatz den Zusammenhang zwischen Ableitung und Integral kennen und nutzen ihn auch in Begründungszusammenhängen. Sie lernen grundlegende Integrationsregeln kennen und nutzen diese für Flächeninhalts- und Volumenberechnungen, für die Bestimmung von Mittelwerten und für weitere Anwendungen – unter anderem in Naturwissenschaften und Technik.

Die Schülerinnen und Schüler können

- den Wert des *bestimmten Integrals* als *orientierten Flächeninhalt* und als Bestandsänderung erklären
- Funktionen aus ihren *Änderungsraten* rekonstruieren
- den Bestand aus *Anfangsbestand* und *Änderungsraten* bestimmen
- den Inhalt *des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung* angeben
- die Begriffe *Integralfunktion* und *Stammfunktion* gegeneinander abgrenzen
- vom *Graphen* der *Funktion* auf den *Graphen* einer *Stammfunktion* schließen und umgekehrt
- den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* in Begründungszusammenhängen, zum Beispiel zum Nachweis der Linearität des Integrals, nutzen
- die Linearität des *Integrals* anschaulich begründen und rechenökonomisch nutzen
- das *bestimmte Integral* als Grenzwert einer *Summe* erläutern und geometrisch deuten
- die *Potenzregel*, die *Regel für konstanten Faktor*, die *Summenregel* sowie das Verfahren der *linearen Substitution* für die Bestimmung einer *Stammfunktion* verwenden
- *Stammfunktionsterme* zu den *Funktionstermen* $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x und $\frac{1}{x}$ angeben
- den *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* zur Berechnung von *bestimmten Integralen* nutzen
- *uneigentliche Integrale* untersuchen
- den *Mittelwert* einer *Funktion* auf einem *Intervall* berechnen
- *Flächeninhalte* zwischen *Graph* und *x-Achse* und zwischen zwei *Graphen* bestimmen
- das *Volumen* von Körpern berechnen, die durch Rotation von Flächen um die *x-Achse* entstehen

Konkretisierung, Vorgehen im Unterricht	Hinweise
<p>Integralrechnung</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Rekonstruieren einer Größe ➤ Das Integral als orientierter Flächeninhalt ➤ Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ➤ Integralfunktion ➤ Bestimmung von Stammfunktionen ➤ Berechnen von Flächeninhalten unter und zwischen Kurven ➤ Uneigentliche Integrale und unbegrenzte Flächen ➤ Mittelwert ➤ Volumen von Rotationskörpern ➤ Anwendungsaufgaben 	<p>Summenregel, Faktorregel, lineare Substitution</p> <p>Rotation von Flächen um die x-Achse</p>

Lineare Gleichungssysteme <15>	
<p>Die Schülerinnen und Schüler lernen ein algorithmisches Verfahren zur Lösung eines linearen Gleichungssystems kennen und wenden diese an.</p>	
<p>Die Schülerinnen und Schüler können</p> <ul style="list-style-type: none"> das <i>Gaußverfahren</i> zum Lösen eines <i>linearen Gleichungssystems</i> als ein Beispiel für ein algorithmisches Verfahren erläutern das <i>Gaußverfahren</i>, auch in <i>Matrixschreibweise</i>, zum Lösen eines <i>linearen Gleichungssystems</i> durchführen einen Funktionsterm zu gegebenen Eigenschaften eines <i>Graphen</i> ermitteln 	
Konkretisierung, Vorgehen im Unterricht	Hinweise
<ul style="list-style-type: none"> ➤ Gauß-Verfahren ➤ Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme ➤ Lineare Gleichungssysteme mit Parametern auf der rechten Seite ➤ Bestimmung ganzrationaler Funktionen zu vorgegebenen Eigenschaften 	<p>Später: Geometrische Interpretation</p>

Analytische Geometrie <35>	
<p>Die Schülerinnen und Schüler entwickeln ihr räumliches Vorstellungsvermögen weiter. Sie koordinatisieren geometrische Sachverhalte und verwenden vektorielle Darstellungen zur Beschreibung von Objekten in Ebene und Raum. Sie nutzen den Vektorkalkül zur Bearbeitung geometrischer Fragestellungen und zum Beweisen geometrischer Sachverhalte.</p>	
<p>Die Schülerinnen und Schüler können</p> <ul style="list-style-type: none"> das <i>Skalarprodukt</i> und das <i>Vektorprodukt</i> berechnen und geometrisch interpretieren einen gemeinsamen <i>orthogonalen Vektor</i> zu zwei Vektoren bestimmen <i>Ebenen</i> mithilfe von <i>Spurpunkten</i> und <i>Spurgeraden</i> im <i>Schrägbild</i> eines <i>Koordinatensystems</i> veranschaulichen <i>Ebenen</i> mithilfe einer <i>Parameterdarstellung</i>, einer <i>Koordinatengleichung</i> und einer <i>Normalengleichung</i> analytisch beschreiben eine <i>Parameterdarstellung</i> einer <i>Ebene</i> in eine <i>Normalengleichung</i> und in eine <i>Koordinatengleichung</i> umrechnen zwischen Gerade-Ebene und Ebene-Ebene die Lagebeziehung untersuchen sowie gegebenenfalls die Schnittgebilde rechnerisch bestimmen die Lösungsmenge eines <i>linearen 3x3 Gleichungssystems</i> geometrisch interpretieren 	
Konkretisierung, Vorgehen im Unterricht	Hinweise
<p>Wiederholung</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Vektoren, Linearkombination, Kollinearität, Mittelpunkt einer Strecke ➤ Geraden und ihre Lagebeziehungen, Berechnung des Schnittpunkts <p>Weiterführung der analytischen Geometrie</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Ebenen im Raum: Parameterform ➤ Orthogonale Vektoren - Skalarprodukt ➤ Normalen- und Koordinatengleichung einer Ebene ➤ Ebenengleichungen umformen: Vektorprodukt ➤ Darstellung von Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Koordinatensystem (Spurpunkte, Spurgeraden) 	

<ul style="list-style-type: none"> ➤ Gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden, Bestimmung von Schnittpunkten ➤ Gegenseitige Lage von Ebene, Bestimmung des Schnittgebildes ➤ Ebenen- und Geradenscharen ➤ Lagebeziehungen in Sachzusammenhängen 	<p>Geometrische Interpretation der Lösungsmenge eines linearen 3x3 Gleichungssystems</p>
---	--

Metrische Geometrie <35>	
<p>Die Schülerinnen und Schüler berechnen mit den Methoden der analytischen Geometrie Abstände und Winkelweiten zwischen geometrischen Objekten in der Ebene und im Raum. Sie nutzen hierfür das Skalar- oder Vektorprodukt zweier Vektoren und ermitteln auch Flächen- und Rauminhalte.</p>	
<p>Die Schülerinnen und Schüler können</p> <ul style="list-style-type: none"> • die <i>Orthogonalität</i> zweier <i>Vektoren</i> mithilfe des <i>Skalarprodukts</i> überprüfen • <i>Winkelweiten</i> mithilfe des <i>Skalarprodukts</i> bestimmen • <i>Schnittwinkel</i> zwischen geometrischen Objekten (<i>Geraden</i> und <i>Ebenen</i>) bestimmen • die <i>Hesse'sche Normalenform</i> einer Ebenengleichung zur Berechnung des <i>Abstands</i> eines <i>Punktes</i> zu einer <i>Ebene</i> anwenden • <i>Abstände</i> zwischen den geometrischen Objekten <i>Punkt</i>, <i>Gerade</i> und <i>Ebene</i> (auch <i>zwischen windschiefen Geraden</i>) ermitteln • Problemstellungen, wie zum Beispiel <i>Spiegelung</i> eines <i>Punktes</i> an einer <i>Ebene</i>, <i>Spiegelung</i> einer <i>Geraden</i> an einem <i>Punkt</i>, Flächeninhalts- und Volumenberechnungen sowie Untersuchungen geradliniger Bewegungen, im Raum bearbeiten • einfache mathematische Aussagen und Sätze beweisen, wie z.B. "In einem Trapez ist die Mittellinie parallel zu den Grundseiten", "Die Seitenmitten eines räumlichen Vierecks bilden die Eckpunkte eines Parallelogramms", "In einer Raute sind die Diagonalen zueinander orthogonal", <i>Satz des Thales</i> 	
Konkretisierung, Vorgehen im Unterricht	Hinweise
<p>Wiederholung</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Betrag eines Vektors, Einheitsvektor ➤ Abstand zweier Punkte <p>Weiterführung der metrische Geometrie</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Abstand Punkt-Ebene und Ebene/Ebene ➤ Abstand Punkt – Gerade und Gerade/Gerade ➤ Skalarprodukt und Winkel zwischen Vektoren ➤ Schnittwinkel zwischen zwei Geraden, zwischen Gerade und Ebene und zwischen zwei Ebenen ➤ Flächeninhaltsberechnungen und Volumenberechnungen ➤ Spiegelung und Symmetrie ➤ Modellieren von geradlinigen Bewegungen ➤ Vektorielle Beweise 	<p>Mit der Methode "Lot fällen" und mithilfe der Hesse'schen Normalenform</p> <p>Auch bei windschiefen Geraden</p> <p>Nutzen des Vektorprodukts</p> <p>Mit und ohne Koordinatensystem, Beweise mit Skalarprodukt</p> <p>Mögliche Vertiefung: Beweise mit geschlossener Vektorkette</p>

Wahrscheinlichkeit und Statistik <40>

Die Schülerinnen und Schüler erhalten einen Einblick in die Methoden der beurteilenden Statistik, indem sie sich mit dem Testen von Hypothesen und mit der Interpretation von statistischen Aussagen kritisch auseinandersetzen. Hierdurch lernen sie die Arbeitsweise empirischer Wissenschaften kennen und erfahren, wie man valide statistische Aussagen treffen kann.

Sie benutzen digitale Hilfsmittel beim Umgang mit diskreten und stetigen Verteilungen. Im Kontext der Untersuchung normalverteilter Zufallsgrößen nutzen sie ihre in der Analysis gewonnen Kompetenzen.

Die Schülerinnen und Schüler können

- das Argumentationsmuster erläutern, das dem Testen von Hypothesen zugrunde liegt
- eine *Nullhypothese* so formulieren, dass sie der Zielsetzung des Tests entspricht
- *Ablehnungsbereich* und *Irrtumswahrscheinlichkeit* an einem Histogramm erläutern
- *ein-* und *zweiseitige Hypothesentests* durchführen und den *Ablehnungsbereich*, die *Entscheidungsregel* und die *Irrtumswahrscheinlichkeit* angeben
- *Signifikanzniveau* und *Irrtumswahrscheinlichkeit* gegeneinander abgrenzen
- *Fehler erster* und *zweiter Art* im Kontext eines *Hypothesentests* erläutern
- den Einfluss des Stichprobenumfangs auf die Wahrscheinlichkeiten für den *Fehler erster Art* (das Risiko erster Art) und für den *Fehler zweiter Art* (das Risiko zweiter Art) angeben
- den Unterschied zwischen *diskreten* und *stetigen Zufallsgrößen* erläutern
- die *Dichtefunktion* einer *normalverteilten Zufallsgröße* mithilfe von *Erwartungswert* und *Standardabweichung* angeben und die zugehörige *Glockenkurve* skizzieren
- stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd *normalverteilten Zufallsgrößen* gehören, und *Wahrscheinlichkeiten* berechnen

Konkretisierung, Vorgehen im Unterricht	Hinweise
<p>Wiederholung</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Elementare Kombinatorik ➤ Pfadregeln und Erwartungswert ➤ Bedingte Wahrscheinlichkeit ➤ Stochastische Unabhängigkeit ➤ Binomialverteilung, Formel von Bernoulli ➤ Erwartungswert und Histogramm für binomialverteilte Zufallsgrößen ➤ Problemlösen mit der Binomialverteilung <p>Testen mit der Binomialverteilung</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Definition von Varianz und Standardabweichung für beliebige diskrete Verteilungen ➤ Varianz und Standardabweichung bei binomialverteilten Zufallsgrößen ➤ Einseitiger Hypothesentest ➤ Fehler erster und zweiter Art ➤ Wahl der Nullhypothese ➤ Zweiseitiger Hypothesentest <p>Normalverteilung</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Normalverteilung und Glockenkurve ➤ Gauß-Funktion und Dichtefunktion ➤ Erwartungswert und Standardabweichung ➤ Sigma-Regeln ➤ Untersuchung annähernd normalverteilter Zufallsgrößen ➤ Stetige Zufallsgrößen 	<p>Ziehen mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge, Ziehen ohne Zurücklegen und mit sowie ohne Berücksichtigung der Reihenfolgen</p> <p>Faires Spiel Vierfeldertafel</p> <p>Berechnung für einen gegebenen Datensatz</p> <p>auch mit Bezug zur Analysis</p>

Vorbereitung auf die schriftliche Abiturprüfung <15>

Grundsätzlich sollten sich alle Klausuren am Format der schriftlichen Abiturprüfung orientieren und auf einen angemessenen Einsatz von Operatoren geachtet werden.

- Beispielaufgaben aus allen Teilgebieten (Analysis, Analytische Geometrie, Stochastik)
- Beispielaufgaben für den Hilfsmittel freien Teil und den Teil mit Hilfsmittel

Nach der schriftlichen Abiturprüfung <15>

- Vorbereitung auf eine evtl. mündliche Prüfung

Ein den Lehrplan ergänzendes Thema, zum Beispiel

- Differentialgleichung für natürliches und beschränktes Wachstum, Wachstums- und Zerfallsprozesse (auch logistisches Wachstum)
- Folgen
- Komplexe Zahlen